Hàm sinh

Kim Đình Sơn, 12A1,THPT Chuyên Vĩnh Phúc

1 Giới thiệu

Xét dãy số$(a_n)_{n\geq 0}$ và hàm số

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Khi đó $G(x)$ đươcj gọi là hàm sinh cho dãy $(a_n)_{n\geq 0}$, ta nói hàm $G(x)$ mang đầy đủ thông tin về dãy $(a_n)_{n\in N}$.Hệ số của x^n chính là số hạng a_ncủa dãy.Nếu biết đặc điểm của hàm $G(x)$ ta hoàn toàn có thể biết mọi số hạng của dãy a_n một cách tổng quát. Ví dụ dãy số thỏa mãn phương trình sai phân $a_{n+1} + Ua_n + Va_{n-1} = 0$ ta có hàm sinh cho dãy thỏa mãn

$$(G(x) - a_0 - a_1x) + Ux(G(x) - a_0) + Vx^2G(x) = 0$$

Hay

$$G(x) = \frac{a_0 + (Ua_0 + Va_1)x}{1 + Ux + Vx^2}$$

Nếu r_1, r_2là hai nghiệm của phương trình đặc trưng $X^2 + UX + V = 0$ khi đó

$$G(x) = \frac{a_0 + (Ua_0 + Va_1)x}{(1 - r_1x)(1 - r_1x)} = \frac{\alpha}{(1 - r_1x)} + \frac{\beta}{(1 - r_2x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n)x^n$$

Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy là : $a_{n=} \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n, n \geq 0$. Trong đó α, β xác định theo $a_0$và a_1.

VÍ DỤ 1.Tìm công thức tổng quát cho dãy $(y_n, n \geq 0)$ với $y_0 = 1$ và $y_n = ay_{n-1} + b^n, \forall n \geq 1$.

Giải Xét $G(x) = \sum_{n=0}^{\propto} y_nx^n$, khi đó

$$G(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(ay_{n-1} + b^n)x^n = ax\sum_{n=0}^{\infty} y_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} b^nx^n = \frac{1}{1 - bx} + ax\,G(x)$$

Suy ra

$$G(x) = \frac{1}{(1 - ax)(1 - bx)} = \frac{1}{b - a}\left(\frac{b}{1 - bx} - \frac{a}{1 - ax}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}x^n$$

Do đó $y_n = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}, \forall n.$

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng số $Fibonacci$

$$F_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-k}{k}$$

Giải Dãy $Fibonacci$ thỏa mãn $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ và $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 1$. Đặt

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-k}{k}$$

Xét hàm sinh $G(x) = \sum_{n=0}^{\propto} a_n x^n$, khi đó

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k (x+1)^k = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Để ý rằng hàm sinh cho dãy $Fibonacci$ cũng chính bằng $\frac{1}{1-x-x^2}$ và $F_0 = 0 = a_0$, $F_1 = 1 = a_1$. .Suy ra $a_n = F_n, \forall n$ .Ta có điều cần chứng minh.

VÍ DỤ 3. $(China\ MO)$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

2 Các phép toán trên hàm sinh

Cho dãy $a_0, a_1 \ldots$và $G(x)$là hàm sinh bởi dãy số đó. Khi đó hàm sinh cho dãy $Ca_0, Ca_1, \ldots$ là $\sum_{n=0}^{\infty} Ca_n x^n = C\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = C\,G(x)$. Ta có pháp nhân.

Tiếp theo, giả sử hai dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}\ và\ \{b_n\}_{n\geq 0}$ có hai hàm sinh lần lượt là A(x) và B(x). Khi đó dãy $\{a_n + b_n\}_{n\geq 0}$ có hàm sinh là $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = A(x) + B(x)$, ta có phép cộng.

Nếu thêm đằng trước dãy a_0, a_1 bằng k số 0 thì ta có hàm sinh co dãy $0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, \ldots$ chính là $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = x^k G(x)$, ta có phép nhân.

Bây giờ ta xét hàm $G(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, đặt $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. Ta có hàm sinh cho dãy $\{c_n\}_{n\geq 0}$ chính là hàm G(x). Ta gọi quy tắc này là "phép xoắn" hay quy tắc "xoắn"(ta có hai dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *và* $\{b_n\}_{n\geq 0}$ ghép cặp từng số hạng như kiểu

$$c_n \quad \begin{matrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & & a_n \end{matrix}$$

.)

VÍ DỤ 4 Chứng minh rằng số cách chèn dấu $*$ vào tích của n+1 nhân tử là số $Catalan$

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Giải. Ta nhận thấy số cách chèn dấu $*$ vào giữa tích $i+1$ nhân tử là C_i và giữa $n-i$ nhân tử còn lại là C_{n-i-1}. Do đó

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

Xét hàm sinh

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

Khi đó $G(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}\, x^n$, theo quy tắc xoắn ta có
$G(x) - 1 = xG(x)^2$ Suy ra

$$G(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Ta có

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right).}{n!} (-4x)^n$$

$$= 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \; \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

VÍ DỤ 5. Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi số nguyên dương m, n, k

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

(Công thức $Vandermonde$)

VÍ DỤ 6. Cho dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ xác định bởi $a_0 = 1$ $và$ $a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_na_0 = 1$. Tìm công thức tổng quát cho a_n

3 Xây dựng hàm sinh

Để biết thông tin về một dãy số ta xét hàm sinh cho dãy số đó. Đối với các bài toán đòi hỏi công thức tường minh cho số hạng của dãy hoặc chứng minh đẳng thức về dãy tức là ta chỉ cần "nắm bắt về một thông tin "(quan trọng) về dãy, khi đó ta chỉ cần xét hàm sinh cho một biến. Vậy thế nào là "thông tin"? Ta sẽ gán cho mỗi một thông tin ứng với một biến. Ví dụ, với một phần tử $\boldsymbol{a}$ của dãy ta có hai lựa chọn là hoặc $\boldsymbol{a}$ được chọn hoặc là nó không được chọn, do đó biểu diễn hàm sinh cho $\boldsymbol{a}$ là $x^0 + x^1 = 1 + x$ như vậy ta có hàm sinh cho dãy gồm n phần tử được chọn là $(1 + x)^n$. Ở đây thông tin là sự xuất hiện của phần tử trong dãy.

VÍ DỤ 7($Romania\ MO$ 2003) Có bao nhiêu số có n chữ số từ tập hợp $\{2,3,7,9\}$ và chia hết cho 3?

Giải Ta có một số chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Như vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm số các số có n chữ số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Ta có mỗi chữ số của số thỏa mãn có giả trị là một trong các số $2,3,7$ $hoặc$ 9. Do đó hàm sinh cho mỗi chữ số sẽ là $x^2 + x^3 + x^7 + x^9$. Xét hàm sinh [1]

$$\mathcal{F}(x) = (x^2 + x^3 + x^7 + x^9)^n = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_{9n}x^{9n}$$

Trong đó f_k là số các số có n chữ số từ $\{2,3,7,9\}$ mà có tổng các chữ số là k.

Xác định $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$ là nghiệm nguyên thủy bậc ba của Unity (phương trình $x^3 = 1$), ta có $\varepsilon \neq 1$ và $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = (\varepsilon^3 - 1)/(\varepsilon - 1) = 0$. Khi đó

$$\mathcal{F}(1) = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots$$

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + f_3 + f_4\varepsilon + \cdots$$

$$\mathcal{F}(\varepsilon^2) = f_0 + f_1\varepsilon^2 + f_2\varepsilon + f_3 + f_4\varepsilon^2 + \cdots$$

Khi đó

$$\mathcal{F}(1)+\mathcal{F}(\varepsilon)+\mathcal{F}(\varepsilon^2)=3f_0+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)f_1+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)f_2+3f_3+\cdots$$
$$=3(f_0+f_3+f_6+\cdots)=3A$$

Vậy ta có các số cần tính là

$$A=\frac{1}{3}\left(\mathcal{F}(1)+\mathcal{F}(\varepsilon)+\mathcal{F}(\varepsilon^2)\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left((1+1+1+1)^n+(\varepsilon^2+1+\varepsilon+1)^n+(\varepsilon+1+\varepsilon^2+1)^n\right)=\frac{1}{3}(4^n+2)$$

---

[1] Nói thêm về hàm sinh.Như ở phần 1 đã giới thiệu, khi ta cần biết chính xác công thức của dãy, thông thường ta chỉ tính được hệ số hoặc giá trị của hàm sinh tại điểm nào đó (như thế là quá đủ).Cũng vậy ta đưa số các đại lượng cần tính về việc tính hệ số của hàm sinh. Tuy nhiên đối với ví dụ 7 lại khác. Đại lượng cần tính lại là tổng của vài số hạng nào đó của dãy, do đó loại hàm sinh ta cần xét là dãy các số mũ trong hàm sinh. Như vậy, ta có hai lọai hàm sinh thường gặp(ứng với một biến –một thông tin) loại thứ hai là

$$\mathcal{G}(x)=x^{a_0}+x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots$$

Trong đó dãy $(a_n)_{n\in N}$ là dãy hữu hạn hoặc vô hạn

VÍ DỤ 8. Cho các số nguyên dương phân biệt $a_0,a_1,\dots,a_n,b_0,b_1,\dots,b_n$, với $n\geq 2$ thỏa mãn $\{a_i+a_j|1\leq i<j\leq n\}$=$\{b_i+b_j|1\leq i<j\leq n\}$. Chứng minh rằng n là một lũy thừa của 2

Giải Xét hai hàm sinh

$$A(x)=x^{a_0}+x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_n}$$

Và

$$B(x)=x^{b_0}+x^{b_1}+x^{b_2}+\cdots+x^{b_n}$$

Suy ra $A(x)^2=\sum_{i=1}^{n}x^{2a_i}+2\sum_{1\leq i<j\leq n}x^{a_i+a_j}$ và $B(x)^2=\sum_{i=1}^{n}x^{2b_i}+2\sum_{1\leq i<j\leq n}x^{b_i+b_j}$. Vậy ta có

$$A(x)^2-A(x^2)=B(x)^2-B(x^2)$$

Hay $A(x)^2-B(x)^2=A(x^2)-B(x^2)$. Mặt khác $A(1)=B(1)=n$ nên ta có thể viết

$$A(x)-B(x)=(x-1)^k\,R(x),\qquad R(1)\neq 0$$

Dođó$(x-1)^k\,R(x)\left(A(x)+B(x)\right)=(x^2-1)^k\,R(x^2)$,i.e,

$$R(x)\left(A(x)+B(x)\right)=(x+1)^k R(x^2)$$

Với $x = 1$, ta có $2n = 2^k$ hay $n = 2^{k-1}$. Vậy n là một lũy thừa của 2

Ngoài ra, việc xây dựng hàm sinh không chỉ dựa trên một biến (vì một biến chỉ cho ta một thông tin duy nhất!). Đối với những bài toán đòi hỏi nhiều thông tin ta cần xét hàm sinh với nhiều biến hơn. Nhưng trước khi đến với các ví dụ đo ta hãy xét bốn định lý cơ bản sau

4 Định lý

Trong ví dụ 7, ta đã thấy một phương pháp giải các bài toán dạng này có sự kết hợp với số phức để tính (như một bài báo của thầy Đặng Hùng Thắng trên tạp chí Toán học & Tuổi trẻ: "dùng cái ảo đếm cái thực").

ĐỊNH LÝ 1 Xác định $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ với n là một số nguyên dương. Khi đó mọi đa thức

$$\mathcal{F}(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots$$

Trong đó f_k được xác định là $zero$ nếu $k > deg\mathcal{F}$. Ta có tổng

$$f_0 + f_n + f_{2n} + \cdots = \frac{1}{n}\left(\mathcal{F}(1) + \mathcal{F}(\varepsilon) + \cdots + \mathcal{F}(\varepsilon^{n-1})\right)$$

Chứng minh Ta xét chứng minh dựa vào các tổng $s_k = 1 + \varepsilon^k + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k}$ .Nếu n chia hết k, khi đó $\varepsilon^k = 1$ nên $s_k = n$. Trong trường hợp khác ta có $\varepsilon^k \neq 1$ và $s_k = \frac{1-\varepsilon^{(n-1)k}}{1-\varepsilon} = 0$. Ta có

$$\mathcal{F}(1) + \mathcal{F}(\varepsilon) + \cdots + \mathcal{F}(\varepsilon^{n-1}) = f_0s_0 + f_1s_1 + f_2s_2 + \cdots = n(f_0 + f_n + f_{2n} + \cdots)$$

Định lý được chứng minh.

VÍ DỤ 9 (IMO 1995 pro 6) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con $\mathcal{A}$ của tập $\{1,2,3,\dots n\}$ thỏa mãn

(i) $\mathcal{A}$ có đúng p phần tử và
(ii) Tổng tất cả các phần tử của $\mathcal{A}$ chia hết cho p

Giải Bài toán trên có hai thông tin cần biết: số các phần tử của tập hợp và tổng các phần tử của tập hợp. Đến đây ta có hai hướng giải như sau

Hướng 1 Rõ ràng với mỗi $i, 1 \le i \le 2p$ ta không thể góp vào nó với hàm $x^0 + x^i = 1 + x^i$ vì tích

$$\prod_{i=1}^{2p}(1 + x^i)$$

Không thể hiện được tập $\mathcal{A}$ có đúng p phần tử. Vì thế ta phải xét hàm sinh

$$G(t,x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2p}) = \sum_{k,m} a_{k,m}t^k x^m$$

Trong đó $a_{k,m}$ là số các tập con $\mathcal{A}$ của $\{1,2,3,\dots n\}$ thỏa mãn (i)$|\mathcal{A}| = 2p-k$ và (ii) $s(\mathcal{A}) = m$.

Vì vậy ta cần tính $A = \sum_{p|m} a_{p,m}$. Đặt $\xi = e^{2\pi i/p}$ là nghiệm nguyên thủy của Unity và

$$E = \{\xi, \xi^2, \dots, \xi^{p-1}, \xi^p = 1\}$$

Ta sẽ tính tổng $\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x)$ theo hai cách

Đầu tiên ta có $\sum_{x\in E} G(t,x) = G(t,1) + \sum_{x\in E\setminus\{1\}} G(t,x) = G(t,1) + \sum_{1\le j\le p-1} G\left(t,\xi^j\right)$.Ta có $G(t,1) = (t+1)^{2p}$. Mặt khác với mọi $r \not\equiv 0 \mod p$ ta có $\{1,2,\dots,p\} = \{1\cdot r, 2\cdot r, \dots, p\cdot r\}$. Do đó

$$\prod_{j=1}^{p}\left(t+\xi^j\right) = \prod_{j=p+1}^{2p}\left(t+\xi^j\right)$$

Hay

$$\prod_{j=1}^{2p}\left(t+\xi^j\right) = \left(\prod_{j=1}^{p}\left(t+\xi^j\right)\right)^2$$

Xét $H(t) = (t-\xi)(t-\xi^2)\dots(t-\xi^p) = t^p - 1$, ta có $H(-t) = (-1)^p(t+\xi)(t+\xi^2)\dots(t+\xi^p) = -(t^p+1)$ suy ra

$$\sum_{x\in E} G(t,x) = (t+1)^{2p} + (p-1)(t^p+1)^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x) &= \sum_{t\in E}\left[(t+1)^{2p} + (p-1)(t^p+1)^2\right] = \sum_{t\in E}(t+1)^{2p} + (p-1)\sum_{t\in E}(t^p+1)^2 \\
&= \sum_{t\in E}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}t^k + 4p(p-1) = \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\sum_{t\in E}t^k + 4p(p-1) \\
&= \sum_{k=0,p,2p}\binom{2p}{k}\sum_{t\in E}t^k + 4p(p-1) = p\left(2+\binom{2p}{k}\right) + 4p(p-1) \\
&= p\left(\binom{2p}{k} + 4p - 2\right) \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

Bây giờ ta tính $\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x)$ theo cách khác. Để ý rằng

$$\sum_{x\in E} x^r = \begin{cases} 0 \text{ nếu } p\nmid r \\ 1 \text{ nếu } p|r \end{cases}$$

Do đó

$$\sum_{t\in E}\sum_{x\in E} G(t,x) = \sum_{t\in E}\sum_{x\in E}\sum_{k,m} a_{k,m}t^k x^m = \sum_{t\in E}\sum_{k,m} a_{k,m}t^k \sum_{x\in E} x^m = \sum_{t\in E}\sum_{\substack{k,m\\ p|m}} a_{k,m}t^k \cdot p$$

$$= p\cdot \sum_{\substack{k,m\\ p|m}} a_{k,m}\sum_{t\in E} t^k = p\cdot \sum_{\substack{k,m\\ p|m}} a_{k,m}\cdot p$$

$$= p^2\cdot (A+2) \quad (\text{do ta không tính trường hợp } k=0 \text{ và } m=0) \qquad (\dagger\dagger)$$

Từ $(\dagger)$ và $(\dagger\dagger)$ suy ra

$$A = \frac{1}{p}\left[\binom{2p}{k} - 2\right] + 2$$

Hướng 2 Từ giả thiết ta thấy đại lượng cần tính gồm "the side and the sum" của các tập con. Vì vậy hàm sinh có dạng

$$\mathcal{G}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} g_{n,k}\, x^n y^k$$

Trong đó $g_{n,k}$ là số các tập con **k** phần tử của $\{1,2,\dots,2p\}$ với tổng các phần tử là **n.** Khi đó ta cần tính $A = g_{p,p} + g_{2p.p} + \cdots$ Để tìm dạng tổng quát cho $\mathcal{G}(x,y)$ ta cần xác định mỗi tập con gồm **k** phần tử và có tổng các phần tử là **n.** Với mỗi $1 \leq \boldsymbol{m} \leq 2p$ ta có **m** được chọn thì **m** cũng sẽ thuộc vào một tập con, ngược lại **m** không được chọn thì **m** cũng không thuộc vào tập con đó .Do đó hàm sinh cho **m** là $x^0y^0 + x^my^1 = 1 + x^my$. Suy ra

$$\mathcal{G}(x,y) = (1+xy)(1+x^2y)(1+x^3y)\dots(1+x^{2p}y)$$

Đặt $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$ Khi đó theo định lý 1

$$\sum_{\substack{n,k\geq 0\\ p|n}} g_{n,k}\, y^k = \frac{1}{p}[\mathcal{G}(1,y) + \mathcal{G}(\varepsilon,y) + \cdots + \mathcal{G}(\varepsilon^{p-1},y)] \quad (\star)$$

Ta tính $\mathcal{G}(\varepsilon^k,y)$, với $0 \leq k \leq p-1$. Xét $k=0$, $\mathcal{G}(1,y) = (1+y)^{2p}$. Với $1 \leq k \leq p-1$. Ta có $\gcd(k,p) = 1$ nên $\{1,2,\dots,p\} = \{1\cdot k, 2\cdot k,\dots,p\cdot k\}$ $(mod\ p)$ Suy ra

$$\mathcal{G}(\varepsilon^k, y) = (1+\varepsilon^k y)(1+\varepsilon^{2k} y)(1+\varepsilon^{3k} y)\dots(1+\varepsilon^{2pk} y)$$
$$= \left((1+\varepsilon^k y)(1+\varepsilon^{2k} y)(1+\varepsilon^{3k} y)\dots(1+\varepsilon^{pk} y)\right)^2$$
$$= \left((1+\varepsilon y)(1+\varepsilon^2 y)(1+\varepsilon^3 y)\dots(1+\varepsilon^p y)\right)^2 = (1+y^p)^2$$

Vậy

$$\sum_{\substack{n,k\geq 0\\ p|n}} g_{n,k}\, y^k = \frac{1}{p}\left((1+y)^{2p} + (p-1)(1+y^p)^2\right)$$

Ta cần tính

$$A = \sum_{\substack{n\geq 0\\ p|n}} g_{n,p} = [x^p]\frac{1}{p}\left((1+y)^{2p} + (p-1)(1+y^p)^2\right) = \frac{1}{p}\left[\binom{2p}{k} + 2(p-1)\right]$$

Đó là đáp số cần tính

VÍ DỤ 10 Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n không chia hết cho p. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên không lớn hơn $n-1$ sao cho tổng $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1} \equiv 0 \ (mod\ p)$.

Đáp số là $(n^{p-1} + p - 1)/p$

VÍ DỤ 11 ($China\ MO$ 1999)Với tập $\boldsymbol{A}$, xác đinh $S(\boldsymbol{A})$ là tổng các phần tử thuộc $\boldsymbol{A}$ **(** nếu $\boldsymbol{A} = \phi$ thì $S(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = 0$). Gọi $S = \{1,2,\dots,1999\}$ và $r = 0,1,2,3,\dots,6$ xác định

$$T_r = \{T \mid T \in S \ \ , \ \ S(T) \equiv r \ \ mod\ 7\}$$

Với mỗi r tính $|T_r|$.

Trước khi đến với ví dụ 12 ta xét định lý sau

<u>ĐỊNH LÝ 2</u> Đạo hàm của hàm số $\mathcal{H}(x) = \prod_{i=1}^{n} \hbar_i(x)$ (trong đó $\hbar_i(x)$ là các hàm khả vi với biến x) là

$$\mathcal{H}'^{(x)} = \mathcal{H}(x)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\hbar_i'(x)}{\hbar_i(x)}$$

Định lý này có thể chứng minh đơn giản bằng quy nạp theo n, với $n = 2$ ta áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm tích hai hàm số. Bây giờ ta xét bài toansau đây

VÍ DỤ 12 ($USA\ MO$ 1989) Cho một phân hoạch π của $n \geq 1$ là một số nguyên, nghĩa là n có thể biểu diễn thành tổng của một hoặc nhiều số nguyên dương nhưng biểu diễn tong phải theo

một thứ tự không giảm (ví dụ $n = 4$ khi đó phân hoạch π là $1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, 2+2$, và 4). Với mỗi phân hoach π xác định $A(\pi)$ là sso các số 1 xuất hiện trong π và $B(\pi)$ xác định là số các số nguyên dương phân biệt xuất hiện trong π (ví dụ $n = 13$ và π là phân hoạch $1+1+2+2+2+5$, khi đó $A(\pi) = 2$ và $B(\pi) = 3$).

Chứng minh rằng với mỗi n cố định , ta có

$$\sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} A(\pi) = \sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} B(\pi)$$

Giải

Đặt $\sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} A(\pi) = a_n$ và $\sum_{\pi \text{ là phân hoạch của } n} B(\pi) = b_n$. Xét $\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\mathcal{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$, từ đó suy ra $a_n = b_n, \forall n$.

Với $m \geq 2$ hàm sinh cho m là $1 + x^m + x^{2m} + \cdots$ Với $m = 1$, nếu 1 được chọn k lần thì ứng với k ta có x^k, tuy nhiên để biết thêm về số lần 1 xuất hiện trong π ta gán thêm biến y, nếu 1 được chọn k lần thì cũng xuất hiện k lần trong π, do đó hàm sinh cho $n = 1$ là $1 + xy + x^2y^2 + \cdots$ Xét

$$\mathcal{F}(x,y) = \sum_{n,k \geq 0} f_{n,k}\, x^n y^k = (1 + xy + x^2y^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\ldots$$

Trong đó ta dùng biến x cho tổng của mỗi phân hoach và y là số lần 1 xuất hiên trong phân hoạch, $f_{n,k}$ là số các phân hoạch của n có k số 1. Chú ý rằng nếu 1 xuất hiện k lần thì ta có $kf_{n,k}$ lần số 1 xuất hiện trong các phân hoạch của n. Do đó

$$a_n = f_{n,1} + f_{n,2} + f_{n,3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{n,k}$$

Do đó

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{n,k} x^n$$

Ta có

$$\frac{d\mathcal{F}}{dy} = \sum_{n,k \geq 0} k f_{n,k}\, x^n y^{k-1}$$

Khi đó chọn $y = 1$, ta có

$$\left.\frac{d\mathcal{F}}{dy}\right|_{y=1} = \sum_{n,k\geq 0} kf_{n,k}\,x^n = \mathcal{A}(x)$$

Mà

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{(1-xy)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

Do đó

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x}{1-x}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m} \qquad (\star)$$

Ta cũng thiết lập hàm $\mathcal{B}(x)$ một cách tương tự. Xét

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y) &= \sum_{n,k\geq 0} g_{n,k}\,x^n y^k \\ &= (1 + xy + x^2y + \cdots)(1 + x^2y + x^4y + \cdots)(1 + x^3y + x^6y + \cdots)\dots \\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^m y}{1-x^m}\right)\end{aligned}$$

Trong đó $g_{n,k}$ là số các phân hoạch π của n với k phần tử phân biệt . Biến x biểu diễn cho tổng các phần tử trong phân hoạch và biến y là số lần xuất hiện của phần tử nào đó trong phân hoạch. Tương tự ta suy ra

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kg_{n,k} = \left.\frac{d\mathcal{G}}{dy}\right|_{y=1}$$

Ta có

$$\frac{d\mathcal{G}}{dy} = \mathcal{G}(x,y)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g_i'(y)}{g_i(y)}$$

Với $g_i(y) = 1 + \frac{x^i y}{1-x^i}$ $, \longrightarrow g_i'(y) = \frac{1}{1-x^i}$ vậy ta có

$$\frac{g_i'(y)}{g_i(y)} = x^i$$

Suy ra

$$\mathcal{B}(x) = \left.\frac{d\mathcal{G}}{dy}\right|_{y=1} = \mathcal{G}(x,1)\frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)\dots} \qquad (\star\star)$$

Từ $(\star)$và $(\star\star)$ suy ra $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$, do đó $a_n = b_n, \forall n$.

CHÚ Ý Bài toán có thể giải bằng cách sử dụng nguyên lý $Fubini$ và ta có một lời giải khá gọn!

<u>ĐỊNH LÝ 3</u> Giả sử m, k là các số nguyên dương , $m > 1$. Khi đó

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{-\frac{i2\pi kj}{m}} = \begin{cases} m-1 \ \text{nếu } m|k \\ -1 \ \text{nếu } m \nmid k \end{cases}$$

Tiếp mtheo ta có đinh lý sau mà ở lời giải 1 của ví dụ 9 và 11 đã sử dung(Thực chất là hệ quả của định lý 3)

<u>ĐỊNH LÝ 4</u> Nếu $\varepsilon = e^{2\pi i/p}, p$ là một số nguyên tố khi đó

$$\sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{kj} = \begin{cases} p \ \text{nếu } p|k \\ 0 \ \text{nếu } p \nmid k \end{cases}$$

VI DỤ 14 Cho số nguyên dương m và n, trong đo $n + 2$ chia hêt cho m. Tính số các bộ bốn số nguyên dương (x, y, z, t) sao cho tổng $x + y + z + t$ chia hết cho m và $1 \leq x, y, z, t \leq n$

(sử dụng định lý 1 và 3)

VÍ DỤ 15 Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương k không vượt quá $p - 1$. Tìm số tập con k phân tử của $\{1,2, \dots, p\}$, sao cho ttongr các phần tử của mỗi tập con đó đều chia hết cho p

5 Các bài toán áp dụng

Bài toán 1($IMO\ Shortlited$ 1998) Cho $(a_n) \in \mathbb{N}, n$ là số tự nhiên,là một dãy số không giảm sao cho mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $a_i + 2a_j + 4a_k$ với i, j, k không nhất thiết phân biệt.

Bài toán 2($USA\ MO$ 1996) Xác định (kèm chứng minh) tập con X của tập các sô nguyên với tính chất sau: mọi số nguyên n có đúng một nghiệm của phương trình $a + 2b = n$ với $a, b \in X$

Bài toán 3 Cho n là số nguyên dương, đặt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (1+x)^{2n-2k}(1-x)^{2k}$$

Chứng minh rằng $[x^{2m-1}]f(x) = 0$ với mọi số nguyên dương m

Bài toán 4 Tính tổng

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2$$

Bài toán 5 Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-1} = 0$$

Bài toán 6 (đồng nhất thức Euler). Đặt

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-x^n)$$

Khi đó

$$[x^n]f(x) = \begin{cases} (-1)^k, \ \textit{nếu } n = \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \\ 0 \ \ \textit{trong trương hợp khác} \end{cases}$$

Bài toán 7($China$ 1996) Cho số nguyên dương n. Tìm số các đa thức $P(x)$ với hệ số thuộc tập $\{0,1,2,3\}$ thỏa mãn $P(2) = n$

Bài toán 8($Putnam$ 1957) Gọi $\alpha(n)$ là số các cách biểu diễn n thành tổng gồm 1 và 2, xếp theo thứ tự. Ví dụ

$$4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$$

(ta có $\alpha(4) = 5$). Gọi $\beta(n)$ là số các cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên lớn hơn 1. Ví dụ $6 = 4 + 2 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$ ta có $\beta(6) = 5$. Chứng minh rằng $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

Bài toán 9($IMO\ Shortlited$ 2007) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tập S= $\{1,2,\ldots,n\}$ có thể tô màu đỏ và xanh thỏa mãn tính chất sau: tập S^3 chứa đúng 2007 bộ có thứ tự (x,y,z) sao cho

(i) x, y, z cùng màu
(ii) $x + y + z$ chia hết cho n

(đáp số là 69 và 84)

Bài toán 10($Vietnam\, TST$ 2008) Cho tập $E = \{1,2,..,2008\}$ được tô bởi ba màu xanh, đỏ và vàng. Gọi A là số các bộ ba $(x, y, z) \in E^3$ sao cho x, y, z cùng màu và 2008 $chia\ hết\ x + y + z$ .Gọi B là tập các bộ ba $(x, y, z) \in E^3$ sao cho x, y, z đôi một khác màu và 2008 $chia\ hết\ x + y + z$. Chứng minh rằng $2A > B$

⁎ **Bài toán 11** Gọi $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ là các tập thỏa mãn $A_1 \neq \emptyset, B_1 = \{0\}$ và $A_{n+1} = \{x + 1 | x \in B_n\}$, $B_n = A_n \cup B_n - A_n \cap B_n$, với mọi số nguyên dương n. Xác định tất cả các sô nguyên dương n để $B_n = \{0\}$.

(đáp số : n là lũy thừa của 2, đẻ chứng minh bài này trước hết ta hay giải quyết hai bổ đề sau

BỔ ĐỀ 1 Nghiệm của dãy hàm $G_n(x)$ thỏa mãn phương trình $G_1(x) = G_2(x) = 1$ và $G_{n+1}(x) = G_n(x) + xG_{n-1}(x)$ với mọi n là

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1-k}{k} x^k$$

BỔ ĐỀ 2 Số tự nhiên n là lũy thừa của 2 nếu và chỉ nếu $\binom{2^m-1-k}{k}$ là $một\ chẵn, \forall 0 < k < 2^{m-1}\ với\ v_2(n) = m, hay\ n = 2^m$

.)

LỜI KẾT

Hàm sinh không những chỉ có ứng dụng trong các bài toán đếm hay chứng minh của tổ hợp mà nó còn có nhiều ứng dụng khác trong các bài toán thống kê, xác suất, trong lĩnh vực tin học, …Qua các ví dụ trên ta có thể thấy dường như chúng không thể giải được nếu như không có hàm sinh. Từ đó ta mới thấy được ý nghĩa và tầm quan trọng của hàm sinh trong các bài toán tổ hợp

Xuân Canh Dần 2010, 16 tháng 2 năm 2010

Kim Đình Sơn, 12A1, THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Tài Liệu Tham Khảo

[1] A path to Combinatirics for Undergraduates, Counting Strategies, Andreescu,T.; Feng. Z. , Bikhauser, 2004

[2] Chuyên đề chọn lọc,Tổ hợp và toán rời rạc, NXBGD 2008

[3] Hàm sinh, Trần Nam Dũng, nguồn http://forum.mathscope.org

[4] Hàm sinh và áp dụng (topic), Biến phức và áp dụng, Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên)

[5] Multivariate Generating Function and Other Tidbits, Zachary R Abel, Mathematical Reflections, vol 2, 2006

[6] Shortlisted IMO 2007/ IMO Group, www://imomath.com

[7] Putnam and Beyond, Andreescu,T

[8] 102 Problems in Algebrafrom the Trainingof the USA IMO Team, Andreescu,T.; Feng. Z. , Bikhauser, 2002